

Generación de curvas y superficies de rotura de taludes en suelos mediante curvas y superficies de Bezier

GERMÁN LÓPEZ PINEDA (1), ANA MARÍA. VILLENA RIVERA (2), ISIDRO OCETE RUIZ (2) Y CARLOS ÁLVAREZ CALVO (2)

(1) Departamento de Mecánica, Área de Mecánica de los Médios Continuos y Teoría de Estructuras
EPS de Córdoba

Universidad de Córdoba
Departamento de Geotecnia, Cemosá, Ingeniería y Control
mellopig@uco.es \ german.lopez@cemosa.es

(2) Departamento de Geotecnia
Cemosá, Ingeniería y Control
ana.villena@cemosa.es
isidro.ocete@cemosa.es
carlos.alvarez@cemosa.es

RESUMEN

Las curvas y superficies Bézier fueron descritas por primera vez en 1962 por el ingeniero francés Pierre Bézier y por Paul de Casteljou, quienes las utilizaron para el diseño de carrocerías de automóviles, aviones y cascos de barcos, esta tecnología matemática de descripción de generación de curvas y superficies se usa ampliamente en los actuales programas de CAD existentes y en programas de diseño 3D, videojuegos, etc.

Las superficies y las curvas de Bezier nos pueden ayudar a determinar mediante los datos de campo (instrumentación, sondeos, ensayos de penetración, observación superficial etc.) la modelización matemática de las zonas de rotura, ya sea mediante curvas para el estudio bidimensional de estabilidad o de las superficies completas en el caso de aplicar modelización 3D. Para la construcción de las curvas y superficies de Bezier se utilizan los denominados polinomios de Bernstein que permiten aproximar funciones de forma continua y presentan una serie de características que los hacen idóneos como base para este tipo de construcciones. Para la construcción de las curvas y superficies es necesario definir los denominados puntos de control, cuyas componentes son los coeficientes que acompañan como constantes a los polinomios de Bernstein para la construcción matemática de las curvas y superficies. Si bien se parte de la información de puntos conocidos de las curvas y superficies a modelizar, estos datos se ha de transformar en los puntos de control para la generación de las expresiones matemáticas de la geometría a determinar. Dentro de las familias de curvas generables mediante este método existe un amplio abanico de posibilidades, curvas polinómicas, racionales y spline dependiendo de la complejidad del problema que queramos modelizar. En el caso de las superficies es posible la realización de aproximaciones polinómicas y de tipo interpolación bicúbica spline con un buen ajuste de la superficie resultante.

La aplicación de este tipo de herramientas para la modelización de curvas y superficies de rotura nos servirá para la cuantificación del alcance y desarrollo de un deslizamiento dejando en manos de un modelo y no de la intuición de la entidad de este tipo de fenómenos, a la par que nos serviría para la aplicación de modelos 3D para estudiar las medidas de estabilidad..

1. INTRODUCCIÓN

La modelización de curvas y superficies de rotura en deslizamientos de ladera es uno de los factores determinantes para la articulación de las medidas a tomar, es necesario conocer la extensión global de la zona movilizada, estimar la profundidad de esta, su extensión lateral, en aras de la definición y optimización de las medidas de mejora de la estabilidad que se aplicarán.

Las curvas y superficies de Bezier son herramientas matemáticas que nos permiten en base a las observaciones de campo, pruebas in situ y datos procedentes de instrumentación, la generación de superficies de rotura tratables mediante programas de cálculo de estabilidad de taludes en 3D y en base a esas superficies obtener curvas asociadas a estas superficies las cuales pueden ser asociadas a curvas de rotura aisladas y estudiarlas mediante códigos de cálculo de estabilidad de taludes en 2D. El soporte de ambas herramientas (superficies y curvas) son los denominados polinomios de Bernstein, existe otro método de base gráfica que es el denominado algoritmo de Casteljou, los dos llevan a la misma base de polinomios pero se hace mediante un proceso iterativo, vamos a usar el método de Bernstein más directo y fácil de programar.

Los polinomios de Bernstein fueron definidos por Sergei Bernstein en 1912 para una demostración alternativa al teorema de Weierstrass, estos polinomios presentan una serie de características que los hacen más interesantes para la modelización de curvas que la interpolación polinómica directa que presenta fuertes oscilaciones al incrementarse el grado.

2. POLINÓMIOS DE BERNSTEIN

El i -ésimo polinomio de Bernstein de grado n , se define como:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (1)$$

Es decir los polinomios de Bernstein son nulos si $i < 0$ o cuando $i > n$, es decir :

- Para $i=0$, solo hay un polinomio :

$$B_0^n(t) = 1 \quad (2)$$

- Para $i=1$, hay dos polinomios :

$$B_0^1(t) = 1 - t, B_1^1(t) = t \quad (3)$$

- Para $i=2$, hay tres polinomios:

$$B_0^2(t) = 1 - 2t + t^2, B_1^2(t) = 2t - 2t^2; B_2^2(t) = t^2 \quad (4)$$

Y así sucesivamente de forma que para $i=k$ hay $k+1$ polinomios

Presentan una serie de propiedades que los hacen idóneos para el ajuste de curvas:

1. Constituye una base de polinomios, es una base del espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$,
2. Presentan características recursivas, es decir verifican la siguiente relación recursiva:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t). \quad (5)$$

3. Partición de la unidad, se verifica que $\forall n \geq 0$ y $\forall t \in [0,1]$, $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$
4. No negatividad, los polinomios son no negativos dentro del intervalo $[0,1]$.

5. Presentan propiedades de simetría;

$$B_i^n(t) = B_{i-1}^n(1-t). \quad (6)$$

6. Cálculo del área bajo la curva :

$$\int_0^1 B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \quad (7)$$

7. La obtención de la derivada:

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad (8)$$

8. Máximo único, que corresponde al valor $t=i/n$

9. Es posible la composición de curvas, satisfaciendo criterios de continuidad y de continuidad en la derivación hasta cierto grado.

En la siguiente figura se representan los tres polinómios para el caso de $i=2$.

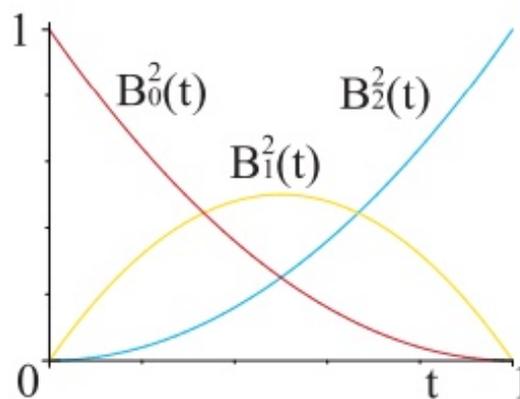


Figura 1. Representación de los polinómios de Berstein para $i=2$

3. CURVAS DE BEZIER

Dados $n+1$ puntos $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$, denominados puntos de control se define la curva de Bezier asociada como:

$$\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (9)$$

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

Este tipo de curvas participa de las propiedades de la base de polinomios con la que se construye:

1. Interpolación de los extremos $\alpha(0) = P_0$ y $\alpha(1) = P_n$.
2. Simetría $\alpha(P_0, \dots, P_n)(t) = \alpha(P_n, P_{n-1}, \dots, P_0)(1-t)$
3. Invarianza afín
4. Envoltura convexa, una curva de Bezier asociada a un conjunto de puntos de control unidos por una poligonal siempre estará incluido en la envoltura convexa de los polígonos de control.
5. Permite subdivisiones y cambios de base

$$(B_u)^{-1} B_u P B_v^T (B_v^T)^{-1} = (B_u)^{-1} Q (B_v^T)^{-1} \quad (19)$$

Se obtiene un sistema n+1 ecuaciones con n+1 incógnitas $M^T M$, ya es una matriz cuadrada, simétrica y regular (es por lo tanto invertible).

La solución sería por lo tanto en notación matricial :

$$P = (B_u)^{-1} Q (B_v^T)^{-1} \quad (20)$$

La solución cumple con el método de los mínimos cuadrados al igual que en caso de las curvas de Bezier.

Una vez obtenidos los parámetros $P_{i,j}$ ya es posible definir la superficie de forma paramétrica. Los criterios de selección de u y v son similares a los comentados en el caso de curvas de Bezier.

7. PARAMETRIZACIÓN DE UNA CURVA DE ROTURA MEDIANTE UNA CURVA DE BEZIER

Se han obtenido cuatro puntos de la curva de un deslizamiento los cuales se indican en la siguiente tabla, uno de ellos es del pie, otro de cabeza y dos de la zona de desarrollo, se plantea parametrizar la curva de Bezier que representaría de forma paramétrica dicho deslizamiento, los puntos están tomados con respecto a un sistema de referencia que parte de una zona por debajo del pie.

Los datos son:

Zona	x	z	t
Pie	3,00	5,00	0
Interior	5,063	5,58	0,180
Interior	9,120	14,648	0,600
Pie	12,00	23,00	1

Tabla 2. Tabla de datos

Se ha tomado para t la selección cordal.

Tenemos por lo tanto 4 puntos, se plantean polinomios de Bernstein de grado 3, los cuales se indican a continuación:

para $i = 0$ el polinomio es $B[t] = (1 - t)^3$
 para $i = 1$ el polinomio es $B[t] = 3(1 - t)^2 t$
 para $i = 2$ el polinomio es $B[t] = 3(1 - t) t^2$
 para $i = 3$ el polinomio es $B[t] = t^3$

Figura 2. Polinomios de Bernstein para $i=3$

En este caso se ha seleccionado un grado para los polinomios que obtiene un sistema cuadrado

Resolviendo el sistema $P = (M^T M)^{-1} M^T Q$, tenemos los valores de los puntos de control son:

x	z
3,00	2,00
7,00	1,00
10,00	6,00
12,00	10,00

Tabla 2. Tabla de puntos de control

La expresión de la curva de Bezier se indica en la siguiente ecuación según (4):

$$\alpha(t) = (3 + 12t - 3t^2, 2 - 3t + 18t^2 - 7t^3). \quad (21)$$

La representación gráfica de la curva se indica en la siguiente imagen:

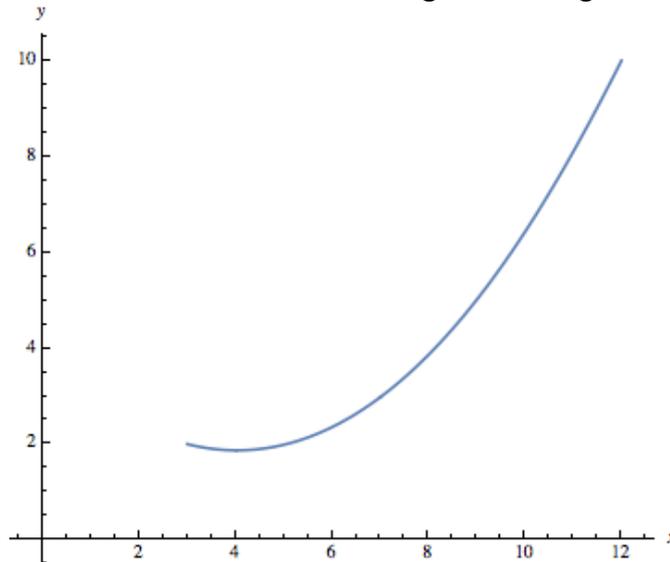


Figura 2. Representación de la curva de deslizamiento modelizada mediante una curva de Bezier

8. PARAMETRIZACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE ROTURA MEDIANTE UNA SUPERFICIE DE BEZIER

Se han obtenido una malla de puntos de un deslizamiento, en la siguiente tabla se muestran los datos tomados, indicar que el eje z se toma desde una base situada en el pie del deslizamiento y se ha corregido los datos de las cotas procedentes de inclinómetros, sondeos y ensayos de penetración dinámica.

x	y	z
0,00	-3,00	0,00
12,14	0,00	2,48
14,28	0,01	2,95
16,35	0,01	3,41
25,70	1,02	5,85
30,80	0,24	7,24
39,00	4,00	10,00

Tabla 3. Datos del deslizamiento

La ecuación de la superficie de Bezier calculada se muestra en la siguiente formulación:

$$\vec{x}(u, v) = (3 u (10 - 8 u + 3u^2), (-3 + 6 v + u (-3 + 6 v) + u^2 (-3 + 6 v) + u^3 (8 - 16 v + 3 v^2)), (2 u (3 + 6 v - 3 v^2 + u^2 (-4 + 18 v - 15 v^2) + 6 u (1 - 4 v + 3 v^2))) \quad (22)$$

La representación gráfica de la superficie se indica en la siguiente imagen:

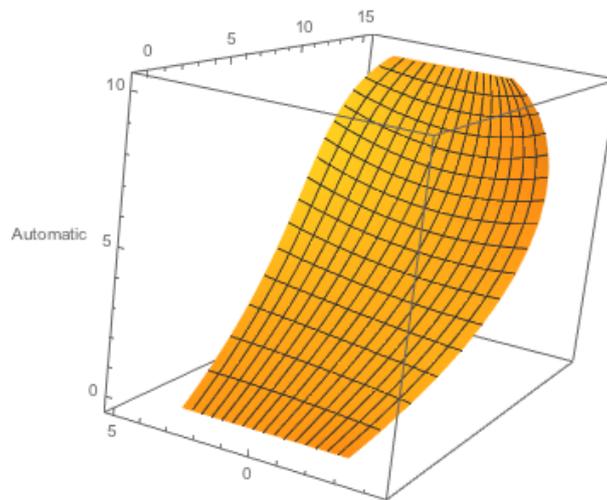


Figura 3. Representación de un deslizamiento 3D modelizada mediante una superficie de Bezier

Esta superficie parametrizada puede ser procesada en un programa de cálculo de estabilidad de taludes en 3D

9. CONCLUSIONES

- La modelización de curvas y superficies de un deslizamiento de ladera es fundamental a la hora de iniciar el proceso de articulación de medidas correctoras
- Las curvas y superficies de Bezier son una herramienta de modelado que nos permite obtener en base a datos fiables procedentes de instrumentación, ensayos de campo y observaciones visuales, de una representación gráfica de la entidad del problema, en lo que respecta a extensión lateral, profundidad etc, lo cual puede ser tomado como punto de partida para la aplicación de las medidas correctoras y su distribución
- En el caso de las curvas, estas pueden ser introducidas en los programas 2D de estabilidad de taludes para cálculos retrospectivos de parámetros y para testear las soluciones.
- En el caso de las superficies estas pueden ser implementadas en un programa 3D de estabilidad de talud, códigos que está lentamente ganando terreno.
- Si hay que indicar que la calidad de las superficies y curvas va a depender de la calidad y cantidad de los datos obtenidos.

REFERENCIAS

- [G.Farin, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, 3a Ed., Academic Press, Inc., San Diego, California, 1993.
- [G.Farin, Nurb Curves and Surfaces from Projective Geometry to Practical Use, A.K.Peters, Wellesley,1995
- [J.Hoscheck i D.Lasser, Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, A.K.Peters, Wellesley,1993.