

CARACTERIZACIÓN MULTIFRACTAL DE LA DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE PORO MEDIDA POR INYECCIÓN DE MERCURIO

Eva Vidal Vázquez^{1*}, Roger M. Mestas Valero¹, José M. Mirás Avalos¹, Glécio Machado Siqueira², Jorge Dafonte Dafonte² y Jorge Paz Ferreiro¹

1: Facultad de Ciencias
Universidade da Coruña
Campus A Zapateira, s/n 15071 Coruña, España
e-mail: evidal@udc.es

2: Escuela Politécnica Superior
Universidade de Santiago de Compostela
Departamento de Ingeniería Agroforestal. Campus Universitario 27002 Lugo, España

Palabras clave: Porosimetría, Inyección de mercurio, Análisis multifractal, Materia orgánica

RESUMEN. *En este trabajo se analizan las características multifractales de distribuciones de tamaño de poro medidas por inyección de mercurio. Se comparan dos pares de muestras con similar textura y distinto contenido en materia orgánica tomados en parcelas contiguas con diferentes usos. Las muestras más ricas en materia orgánica presentaron mayor volumen de macroporos. Mediante el análisis de los espectros de singularidades y de dimensiones generalizadas se comprobó que las curvas de inyección de mercurio presentaban naturaleza multifractal. Los espectros multifractales de muestras con similar textura y distinto contenido en materia orgánica no exhibieron diferencias notables en uno de los suelos estudiados, pero fueron visiblemente diferentes en el otro, en contraste con las respectivas curvas acumulativas de entrada de mercurio. Los parámetros multifractales extraídos de los espectros de singularidad y dimensiones generalizadas reflejaron las principales características de las distribuciones de tamaño de poro y proporcionan una descripción cuantitativa de las mismas.*

ABSTRACT. *The aim of this work was to assess the multifractal characteristics of pore size distributions measured by mercury injection porosimetry. Two pairs of soil samples with similar texture and different organic matter contents were taken in neighbouring plots with distinct soil uses. Volume of macropores was higher on samples with higher organic matter content. Singularity spectra and generalized dimension spectra showed that multifractal distribution was a suitable model for mercury injection curves. Multifractal spectra of soil samples with similar texture did not show great differences in one of the studied soils but they were visibly distinct in the second soil, which differ from the corresponding cumulative mercury injection curves. Multifractal parameters extracted from singularity spectra and generalized dimension spectra reflected the main characteristics of the pore size distributions allowing their quantitative description.*

1. INTRODUCCIÓN

El espacio poroso del suelo determina las proporciones relativas de las fases líquida y gaseosa, así como la movilidad de los fluidos que forman parte de la composición del mismo; en los poros también viven los microorganismos del suelo. Dada la complementariedad entre la fase sólida y el espacio poroso del suelo,

algunos autores han utilizado el análisis del sistema poroso para describir y cuantificar aspectos relacionados con la estructura del mismo (Dexter, 1988; Kay, 1990). El contenido en materia orgánica es uno de los factores de los que depende la estabilidad de la estructura (Oades, 1984), al tiempo que interviene en la magnitud y distribución del espacio poroso (Fernández Rueda, 1997).

Durante los últimos años se han desarrollado numerosos métodos para evaluar la estructura del suelo a partir de distribuciones de tamaño de poro y muchos de ellos han aplicado técnicas de análisis fractal para caracterizar las mismas (Perrier et al., 1999; Bartoli et al., 1991; Caniego et al., 2001; Menéndez et al., 2005, entre otros). Más recientemente se han desarrollado numerosos trabajos que emplean la aproximación multifractal para describir distribuciones de tamaño de poro. Los multifractales son fractales no uniformes y, en oposición a los fractales uniformes, presentan fluctuaciones de densidad local (Posadas et al., 2003). La caracterización multifractal de datos de porosidad obtenidos por análisis de imagen ha sido llevada a cabo entre otros por Posadas et al. (2003), Bird et al. (2006) y Grau et al. (2006), mientras que Vidal Vázquez et al. (2008) han empleado datos de porosidad obtenidos por inyección de mercurio.

El objetivo principal del presente trabajo consiste en la descripción de las características multifractales de distribuciones de tamaño de poro obtenidas por inyección de mercurio. Adicionalmente, se emplean parámetros obtenidos de los espectros de singularidad y de dimensiones generalizadas para llevar a cabo un estudio cuantitativo de la influencia del contenido en materia orgánica sobre la distribución de tamaño de poros.

2. MATERIAL Y MÉTODOS

Los suelos seleccionados se ubican en las localidades Barreiro-Mondoñedo y Bonxe, ambos en la provincia de Lugo, siendo los materiales de partida caliza y sedimentos terciario-cuaternarios, respectivamente. La toma de muestras se efectuó en el horizonte superficial de parcelas vecinas con distinta dedicación, cultivo o prado. Con ello se pretendía obtener pares de muestras con textura similar y diferentes contenidos en materia orgánica. En la tabla 1 se consigna la composición de los horizontes estudiados. Se comprueba que el contenido en materia orgánica es más elevado bajo pradera que bajo policultivo en rotación en los dos pares de muestra estudiados. Así mismo la composición granulométrica es muy similar en las tres fracciones texturales, en particular en el suelo de Bonxe.

Tabla 1. Composición de los horizontes de laboreo estudiados.

Localidad	Uso del suelo	pH	M. Orgánica (%)	Arena (%)	Limo (%)	Arcilla (%)
Bonxe	Prado	5,2	6,50	49,5	32,5	18,0
Bonxe	Cultivo	5,1	4,80	50,0	31,9	18,1
Barreiro	Prado	7,4	3,42	47,7	43,2	9,1
Barreiro	Cultivo	7,2	2,92	45,5	45,8	8,7

La técnica de la porosimetría de inyección de mercurio está basada en la elevada tensión superficial de este metal líquido, que por lo tanto no moja las superficies con las que entra en contacto. Cuando se inyecta mercurio a presión en una muestra de suelo, asumiendo que los poros son cilíndricos, se puede obtener el diámetro equivalente, d , a partir de la presión, P , aplicada para forzar la entrada del líquido, dada que ambos parámetros son inversamente proporcionales, según la ley de Jurin, descrita en Fiès (1992), entre otros:

$$P = -4\gamma\cos\theta/d \quad (1)$$

En donde θ el ángulo de contacto entre el mercurio y la matriz sólida del suelo (140°), y γ es la tensión superficial del mercurio (0,480 N/m).

Las medidas de distribución de tamaño de poro se efectuaron en muestras de 1,7 a 2 g que constaban de varios agregados de 2 a 3 mm de diámetro. Se utilizó un porosímetro modelo Micromeritics 9310 (Microdevices Inc.,

USA) con dos unidades que permitían operar desde $3,10^{-3}$ hasta 300 MPa (Fiès, 1992; Fernández Rueda, 1997), lo que corresponde a diámetros equivalentes de aproximadamente 500 a $0,005 \mu\text{m}$.

El análisis multifractal de una distribución de probabilidades en un intervalo lineal $I = [a,b]$ requiere la definición de diferentes subintervalos de I con la misma longitud, δ . El procedimiento generalmente empleado para ello (Evertsz y Mandelkrot, 1992; Kravchenko et al., 1999; Jiménez-Hornero et al., 2007) consiste en una reducción de escala diádica, lo que supone efectuar particiones sucesivas del soporte de acuerdo con dimensiones o tamaños que vienen dados por: $\delta = 2^{-k}L$, en donde $k = 0, 1, 2, \dots$ y L es la longitud del soporte.

La implementación del análisis multifractal de las distribuciones de tamaño de poro ha sido descrita previamente (Vidal Vázquez et al., 2008). En la práctica dicho análisis es similar al efectuado para otras propiedades del suelo que actualmente pueden ser caracterizadas con técnicas avanzadas que proporcionan series de datos medidas sobre un soporte cuyas dimensiones permiten considerar la presencia o ausencia de multifractalidad. Entre las propiedades del suelo que han sido analizadas de un modo similar cabe citar la distribución del tamaño de partícula medida por difracción láser (Posadas et al., 2001; Montero, 2005; Miranda et al., 2006), las distribuciones de tamaño de poro obtenidas por análisis de imagen (Posadas et al., 2003; Bird et al., 2006; Grau et al., 2006) y porosimetría de intrusión de mercurio (Vidal Vázquez et al., 2008) o los diagramas de adsorción de nitrógeno (Paz-Ferreiro et al., 2009).

En todos los casos antes citados, para cada tamaño de escala δ , se le asigna un número de celdas $N(\delta) = 2^k$ de tal modo que las medidas respectivas $\mu_i(\delta)$ se evalúan a partir de la distribución relativa de los datos de volumen de Hg inyectado, v_i , o de otra variable experimental que se considere. Dicho de otro modo, en primer lugar se normalizan los datos experimentales de volumen para obtener una función de probabilidad:

$$V_i = (v_i / \sum_i v_i), \quad i=1,2,\dots,N(\delta) \quad (2a)$$

de modo que,

$$\sum_{i=1}^{N(\delta)} V_i = 1 \quad (2b)$$

Posteriormente la medida $\mu_i(\delta)$ asignada a cada una de las celdas o intervalos se evalúa sumando todas las contribuciones o datos experimentales, V_i , que corresponden a cada celda. Conviene recordar que los intervalos de escala a que se refieren los cálculos presentan un espaciado logarítmico.

A partir de las series de datos normalizados se calcula la función de probabilidad (p_i) según:

$$p_i(\delta) = \frac{N_i(\delta)}{N_t} \quad (3)$$

En donde $p_i(\delta)$ es la probabilidad de la medida en el segmento o celda i^{th} de tamaño δ , $N_i(\delta)$ es el volumen normalizado correspondiente a la celda i^{th} y N_t es el volumen total en el rango de diámetros de poro equivalentes estudiados.

De acuerdo con Chhabra y Jensen (1989), para cada intervalo i^{th} de tamaño δ , la función de probabilidad tiene la siguiente propiedad para una medida multifractal:

$$p_i(\delta) \sim \delta^{-\alpha_i} \quad (4)$$

En donde α_i , es el exponente de Hölder que cuantifica la importancia de las singularidades de la medida de una variable y depende de cada celda i . El exponente α_i también es conocido como la dimensión fractal local y su

valor se puede calcular de la relación (4) cuando $\delta \rightarrow 0$.

Para una medida multifractal diferentes segmentos o celdas presentan diferente exponente, α , que corresponden a distintos grados de singularidad de la medida. Para medidas con distribución multifractal, el número $N_\alpha(\delta)$ de celdas de tamaño δ con un exponente de Hölder con el mismo valor de α , $f(\alpha)$ aumenta conforme disminuye δ , según la siguiente relación de potencia:

$$N_\alpha(\delta) \sim \delta^{-f(\alpha)} \quad (5)$$

Por otra parte la función de partición puede ser determinada para sucesivos momentos q que varían de $-\infty$ a $+\infty$ mediante la expresión:

$$\chi(q, \delta) = \sum_{i=1}^{n(\delta)} p_i^q \quad (6)$$

También se ha puesto de manifiesto (Halsey et al., 1986; Chhabra y Jensen, 1989, entre otros) que cuando se representa en coordenadas doble logarítmicas el término $\chi(q, \delta)$ versus δ para diferentes valores de q se obtiene:

$$\chi(q, \delta) \propto \delta^{-\tau(q)} \quad (7)$$

En donde $\tau(q)$ es una función no lineal de q conocida como la función exponente de masa. A su vez $\tau(q)$ puede escribirse del siguiente modo:

$$\tau(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \chi(q, \delta)}{\log \delta} \quad (8)$$

La transformación de Legendre de la curva $\tau(q)$ permite obtener siguiendo a Chhabra y Jensen (1989) la dimensión fractal local $\alpha(q)$. Además, siguiendo este método, también se puede estimar el parámetro $f(\alpha)$ de la ecuación (5) que representa el número de celdas de dimensiones δ en las que existe el mismo valor de α :

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (9a)$$

$$f(\alpha) = q\alpha(q) - \tau(q) \quad (9b)$$

El gráfico de $f(\alpha)$ frente a α , se denomina espectro multifractal y es una parábola invertida. Dicho espectro es un solo punto en el caso de un modelo monofractal y para distribuciones multifractales presenta un intervalo de valores de α más amplio conforme aumenta la heterogeneidad de la distribución.

Las medidas multifractales también pueden ser caracterizadas por su espectro de dimensiones generalizadas. En la práctica se pueden obtener modelos multifractales con un número pequeño de parámetros como las dimensiones generalizadas (Hentschel y Procaccia, 1983), también denominadas dimensiones de Rényi autor que las definió en 1955 mediante la siguiente expresión:

$$D_q = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log[\chi(q, \delta)]}{\log \delta} \quad (10)$$

Por lo tanto, τ and D_q presentan la siguiente relación:

$$\tau(q) = (1-q)D_q \quad (11)$$

Para una distribución monofractal D_q es una constante cuando se representa en función de q , de modo que la evaluación de sucesivos momentos no proporciona información adicional. Sin embargo para medidas multifractales la relación entre D_q y q no es constante y típicamente presenta un aspecto similar al de una doble sigmoide con un punto de inflexión para $q = 0$. En este caso las dimensiones generalizadas que se emplean más frecuentemente corresponden a la parte central del espectro y son: D_0 obtenida para $q = 0$, D_1 para $q = 1$ y D_2 para $q = 2$, que se denominan respectivamente dimensión de capacidad, de información (o entropía de Shannon) y de correlación.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Distribuciones de tamaño de poro

En la Figura 1 se presentan las curvas acumulativas de mercurio inyectado en los agregados en el intervalo de diámetros equivalentes comprendido entre 300 y 0,005 mm para las muestras tomadas en las localidades de Bonxe y Barreiro, mientras que en la Figura 2 se muestran las correspondientes distribuciones de tamaño de poro. El volumen total de mercurio inyectado en el entorno de tamaños de poros estudiados (0,005 a 300 μm), así como el que corresponde a los poros de transmisión ($> 50 \mu\text{m}$), almacenamiento (50 a 0,5 μm) y residuales ($< 0,5 \mu\text{m}$), según la clasificación de Greenland (1977) se consignan en la Tabla 2.

Se aprecia una fase mayor de entrada de mercurio en las cuatro muestras estudiadas (Figura 1), de modo que la distribución de tamaño de poro puede ser descrita, en primera aproximación, como una curva unimodal. Sin embargo una observación más detallada permite reconocer fases menores de entrada de mercurio en el entorno de los poros superiores a 10 μm , por un lado e inferiores a 0,5 μm , por otro lado. Estos resultados son similares a los obtenidos para otros suelos de textura media en la Comunidad Autónoma de Galicia (Fernández Rueda, 1997).

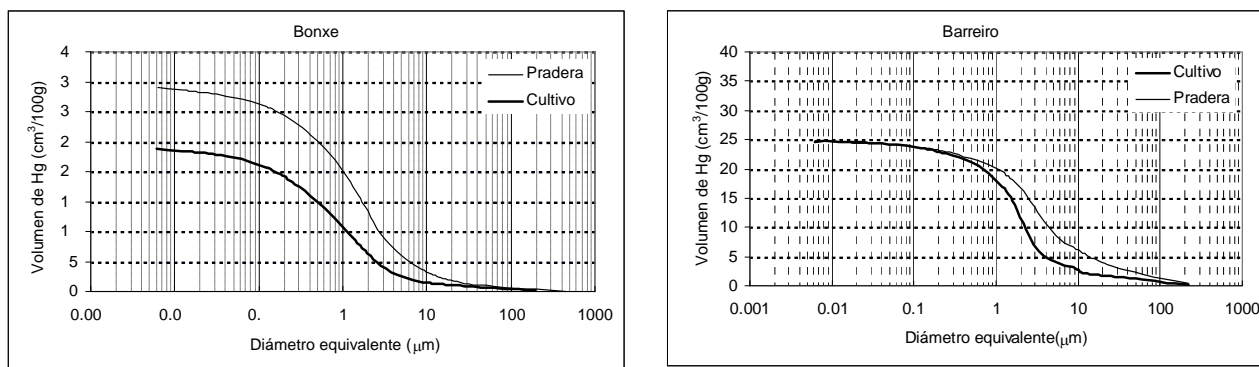


Figura 1. Curvas acumulativas de inyección de mercurio en las parcelas dedicadas a pradera y a cultivo de los dos suelos estudiados.

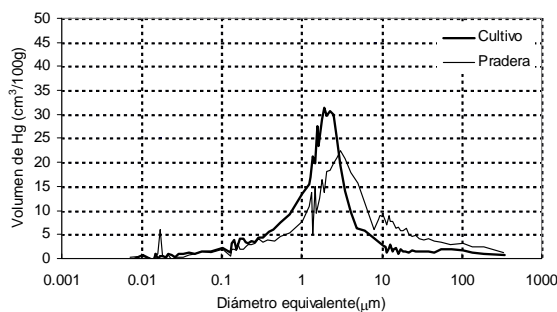


Figura 2. Distribución de tamaño de poro en el suelo de Barreiro bajo pradera y cultivo.

El volumen total de mercurio inyectado en el suelo de Bonxe, entre 300 y 0.005 μm , es claramente superior en las muestras tomadas bajo prado que en las tomadas bajo cultivo, mientras que, por el contrario, en el suelo de Barreiro dicho volumen es muy similar (Figura 1 y Tabla 2). Sin embargo, en los dos suelos los poros de mayor tamaño presentan una abundancia relativamente mayor bajo pradera que bajo cultivo, como se puede comprobar en la Figura 3 en donde se representa la distribución relativa de poros en función de su diámetro equivalente para las muestras tomadas en Barreiro. En efecto, en esta figura se puede comprobar como la distribución de tamaño de los poros más finos, inferiores a 0,1 μm , se mantiene prácticamente igual, independiente del uso de suelo, mientras que por encima de este umbral es en donde se observan diferencias, de tal modo que los poros de mayores dimensiones son más abundantes bajo pradera.

Tabla 2. Porosidad total, de transmisión, almacenamiento y residual medida por inyección de mercurio.

Localidad	Uso del suelo	Total	cm ³ .100g ⁻¹		
			> 50 μm	50 a 0,5 μm	<0,5 μm
Bonxe	Prado	34,0	1,0	24,2	8,8
Bonxe	Cultivo	23,8	0,9	14,4	8,7
Barreiro	Prado	24,8	2,3	19,4	3,6
Barreiro	Cultivo	24,7	1,2	19,9	3,1

Los datos de la Tabla 2 ponen de manifiesto que en el suelo de Bonxe existen amplias diferencias en cuanto al volumen que ocupan los mesoporos que asciende a 24,2 cm³/100g bajo pradera frente a 14,4 cm³/100g bajo cultivo. Por el contrario en Barreiro las diferencias son de escasa magnitud tanto en lo que se refiere a la porosidad total como en los tres entornos de tamaño de poro considerados.

3.2. Análisis multifractal de las distribuciones de tamaño de poro

Las funciones exponente de masa, $\tau(q)$, de las cuatro muestras estudiadas se presentan en la Figura 3. Se comprueba que las curvas son convexas y distintas de la línea recta que corresponde al modelo monofractal. El índice de multifractalidad sigue el siguiente orden: Barreiro pradera < Bonxe cultivo \approx Bonxe pradera < Barreiro cultivo.

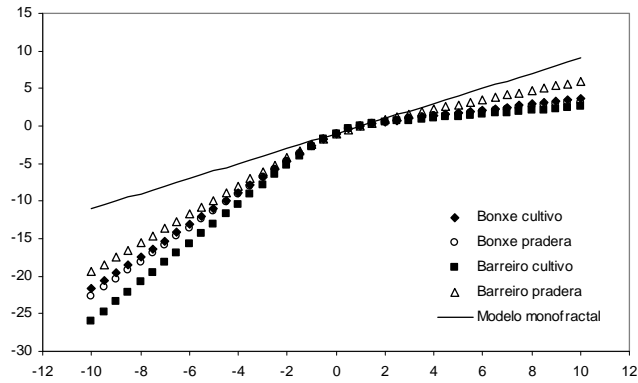


Figura 3. Funciones exponentes de masa, $\tau(q)$, de las distribuciones de tamaño de poro obtenidas por inyección de mercurio.

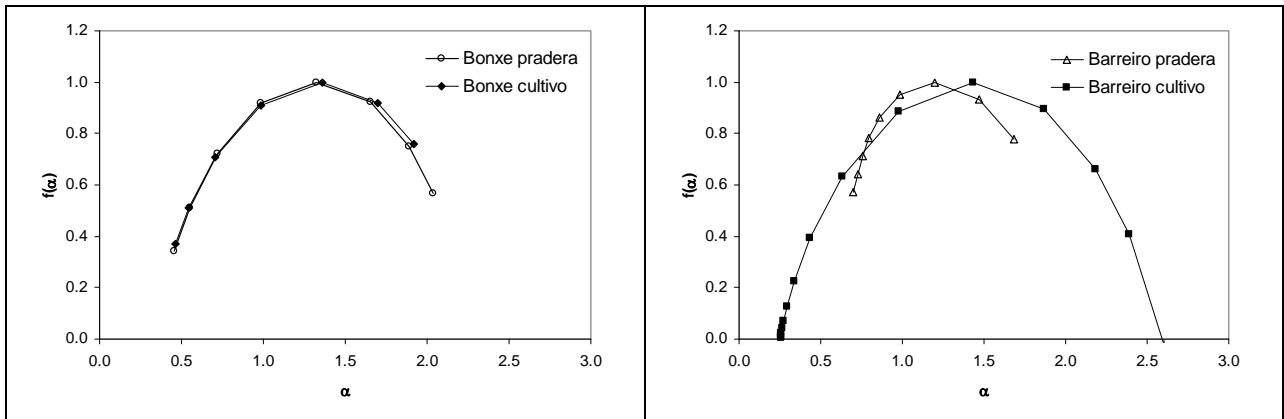


Figura 4. Espectros de singularidad $f(\alpha)$ dimensiones generalizadas o espectros de Rényi, $D(q)$ de las cuatro muestras estudiadas.

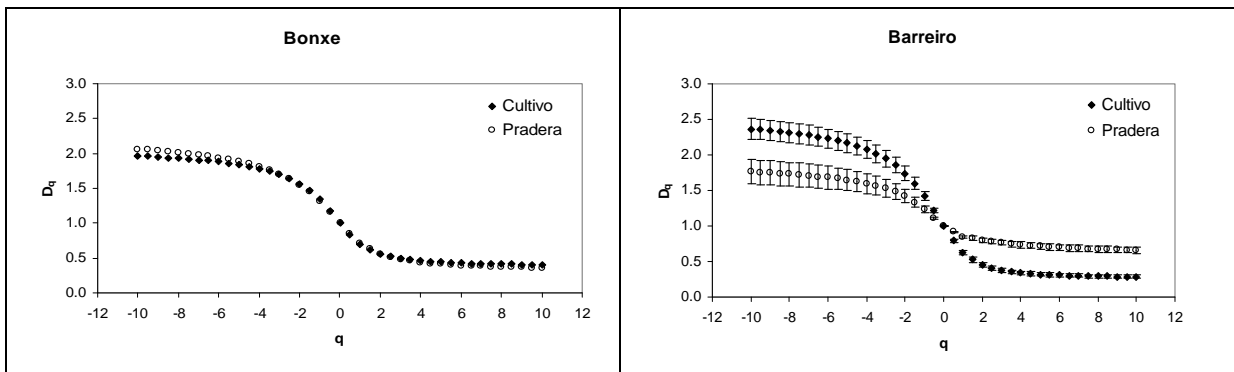


Figura 5. Espectros de dimensiones generalizadas o espectros de Rényi, $D(q)$ de las cuatro muestras estudiadas.

Paralelamente, los espectros de singularidad, $f(\alpha)$, y de dimensiones generalizadas, $D(q)$, se presentan en las Figuras 4 y 5 respectivamente. En ambos espectros, las diferencias entre las muestras de Bonxe son inferiores que las que corresponden a las muestras de Barreiro, lo que está de acuerdo con lo observado para la función exponente de masa, $\tau(q)$, y contrasta con lo observado en las curvas acumulativas de intrusión de mercurio.

La mayor diferencia en los espectros de singularidad, $f(\alpha)$, del suelo de Bonxe se aprecia en la rama derecha del mismo, que corresponde a la abundancia relativa de los poros de menor diámetro equivalente; por el contrario los poros de mayores dimensiones presentan una abundancia similar bajo pradera y cultivo y son más frecuentes que los poros de menores dimensiones, como pone de manifiesto la mayor longitud de la rama izquierda de $f(\alpha)$, que es muy similar para los dos usos del suelo estudiados. Estos resultados están de acuerdo con los datos experimentales si, en vez de las curvas acumulativas de inyección de mercurio, se consideran las distribuciones relativas de los tamaños de poros. En este caso, los espectros multifractales de muestras con similar textura y distinto contenido en materia orgánica no presentaron diferencias importantes en cuanto a su amplitud o a la longitud de sus ramas, lo que significa que la heterogeneidad geométrica del medio poroso no dependió del contenido en materia orgánica.

En el suelo de Barreiro, las mayores diferencias que se observan en los espectros de singularidad, $f(\alpha)$, y de dimensiones generalizadas, $D(q)$, tampoco están en relación con las curvas acumulativas de entrada de mercurio del volumen total de poros que son intruídos, dado que estos parámetros son muy variables bajo los dos tipos de dedicación. Una vez más los espectros multifractales reflejan la organización interna de las respectivas distribuciones de tamaños de poros que difieren notablemente entre sí, como se puede observar en la Figura 2. En este caso se ponen de manifiesto diferencias importantes en cuanto a la heterogeneidad geométrica de los agregados muestreados bajo pradera y policultivo en rotación.

Tabla 3. Índices multifractales obtenidos de los espectros de dimensiones generalizadas y de singularidad.

Localidad	Uso del suelo	D_1	R^2	D_2	R^2	D_{-10}	R^2	D_{10}	R^2
Bonxe	Prado	$0,717 \pm 0,066$	0,991	$0,563 \pm 0,101$	0,977	$2,060 \pm 0,283$	0,981	$0,358 \pm 0,082$	0,950
Bonxe	Cultivo	$0,695 \pm 0,078$	0,987	$0,560 \pm 0,085$	0,968	$1,963 \pm 0,415$	0,949	$0,405 \pm 0,093$	0,949
Barreiro	Prado	$0,847 \pm 0,046$	0,997	$0,802 \pm 0,071$	0,992	$1,762 \pm 0,405$	0,949	$0,658 \pm 0,102$	0,976
Barreiro	Cultivo	$0,629 \pm 0,074$	0,986	$0,454 \pm 0,075$	0,973	$2,367 \pm 0,335$	0,980	$0,284 \pm 0,051$	0,968

En la Tabla 3 se presentan algunos parámetros multifractales extraídos de los espectros de dimensiones generalizadas. En primer lugar, el valor de la dimensión de capacidad, D_0 , que no se presenta en esta tabla, fue igual a 1,000 en las cuatro muestras estudiadas, lo que refleja el hecho de que todas las celdas usadas en el análisis multifractal “contenían objeto”, es decir presentaban un espacio poroso no nulo. La dimensión de entropía, D_1 , está considerada como una medida del grado de concentración de las distribuciones de tamaño de poro, de modo que para $D_1 = D_0$ el modelo multifractal ya no es válido y la medida debe de ser considerada una monofractal. En los dos suelos estudiados D_1 fue más elevada bajo pradera que bajo cultivo, lo que indica que la pérdida relativa de poros de mayores dimensiones está asociada a una disminución de la dimensión de entropía. El valor de la dimensión de capacidad, D_2 , disminuyó de forma paralela a la de D_1 en las cuatro muestras estudiadas. Los coeficientes de correlación para los momentos centrales, D_0 , D_1 y D_2 fueron superiores a $R^2 = 0,968$ en los cuatro casos estudiados y considerando el rango de momentos $-10 < q < 10$ dichos coeficientes fueron superiores a 0,94. Estos resultados indican la consistencia del análisis multifractal de las distribuciones de tamaño de poro medidas por inyección de mercurio para un amplio rango de momentos, q .

4. CONCLUSIONES

El aumento del contenido en materia orgánica en los suelos estudiados lleva aparejado un incremento de los poros de mayores dimensiones medidos por inyección de mercurio, al menos en términos relativos. Por el contrario, el volumen de microporos se mantuvo independiente del contenido en materia orgánica.

Se comprobó la naturaleza multifractal de las curvas de inyección de mercurio, mediante el análisis de la función exponente de masa y de los espectros de singularidad y dimensiones generalizadas.

Los parámetros multifractales extraídos de los espectros de singularidad y dimensiones generalizadas reflejan las principales características de las distribuciones de tamaño de poro estudiadas y proporcionan una caracterización cuantitativa de las mismas.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido realizado con fondos correspondientes al proyecto de referencia INCITE08PXIB162169PR y la red para el estudio del uso y manejo integrado del suelo y el agua, de referencia 26/2006, financiados por la Xunta de Galicia.

REFERENCIAS

- Bartoli, F., R. Philippp, M. Doiresse, S. Niquet, y M. Dubuit, 1991. Structure and self-similarity in silty and sandy soils: the fractal approach. *J. Soil. Sci.* 42, 167-185.
- Bird, N., M.C. Díaz, A. Saa, y A.M. Tarquis, 2006. Fractal and multifractal analysis of pore-scale images of soil. *Journal of Hydrology* 322, 211-219.
- Caniego, J., M.A. Martín, y F. San José, 2001. Singularity features of pore size distribution in soil: singularity strength analysis and entropy spectrum. *Fractals* 9, 305-316.
- Chhabra A.B., y R.V. Jensen, 1989. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum. *Phys. Rev. Lett.* 62, 1327-1330.
- Dexter, A. R. 1988. Advances in characterization of soil structure. *Soil and Tillage Research* 11, 199-238.
- Everstz, C.J.G., y B.B. Mandelbrot, 1992. Multifractal measures. En Peitgen, H., H. Jürgens, y D. Saupe. *Chaos and Fractals*. Springer, Berlin 921-953.
- Fernández Rueda, M.J., 1997. *Características físicas y mecánicas de suelos de cultivo*. Tesis doctoral. Universidad da Coruña. 283 pp.
- Fiès, J.C., 1992. Analysis of soil textural porosity relative to skeleton particle size, using mercury porosimetry. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 56, 1062-1067.
- Grau, J., V. Méndez, A.M. Tarquis, M.C. Díaz, y A. Saa, 2006. Comparison of gliding box and box-counting methods in soil image analysis. *Geoderma* 134, 349-359.
- Greenland, D.J., 1977. Soil damage by intensive arable cultivation: Temporary or permanent?. *Phil. Trans. Roy. Soc. Serie B* 281, 193-208.
- Jiménez-Hornero, F.J., J.V. Giráldez, y A.M. Laguna, 2007. Análisis multifractal de flujo simulado con un modelo de malla en medios porosos bidimensionales idealizados. *Estudios de la Zona No Saturada del Suelo Volumen VIII*, 47-52.
- Halsey, T.C., M.H. Jensen, L.P. Kanadoff, I. Procaccia, y B.I. Shariman, 1986. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. *Phys. Rev. A* 33, 1141-1151.
- Hentschel, J.G.E., y I. Procaccia, 1983. The infinite number of generalized dimensions on fractals and strange attractors. *Physica D* 8, 435-444.
- Kay, D., 1990. Rates of changes of soil structure under different cropping systems. *Advances in Soil Sciences* 12, 1-41.
- Kravchenko, A.N., C.W. Boast, y D.G. Bullock, 1999. Multifractal Analysis of Soil Spatial Variability. *Agron. J.* 91, 1033-1041.
- Menéndez, I., J. Caniego, J.F. Gallardo, y K. Olechko, 2005. Use of fractal scaling to discriminate between macro- and mesopore sizes in forest soils. *Ecological Modelling* 182, 291-304.
- Miranda, J.G.V., E. Montero, M.C. Alves, A. Paz González, y E. Vidal Vázquez, 2006. Multifractal characterization of saprolite particle-size distributions after topsoil removal. *Geoderma* 134, 373-385.
- Montero, E., 2005. Rényi dimensions analysis of soil particle-size distributions. *Ecological Modelling* 182(3-4), 305-315.
- Oades, J.M., 1984. Soil organic matter and structural stability: mechanisms and implications for management. *Plant and Soil* 76, 319-337.
- Paz-Ferreiro, J., M.G. Wilson, y E. Vidal Vázquez, 2009. Multifractal description of nitrogen adsorption isotherms. *Vadose Zone Journal* 8, 209-219.
- Perrier, E., N. Bird, y M. Rieu, 1999. Generalising the fractal model of soil structure: the PSF approach. *Geoderma* 88, 137-164.
- Posadas, A.N.D., D. Giménez, M. Bittelli, C.M.P. Vaz, y M. Flury, 2001. Multifractal characterization of soil particle-size distributions. *Soil Science Society of America Journal* 61, 1361-1367.
- Posadas, A.N.D., D. Giménez, R. Quiroz, y R. Protz, 2003. Multifractal characterization of soil pore systems. *Soil Science Society of America Journal* 67, 1361-1369.
- Rényi, A., 1955. On a new axiomatic theory of probability. *Acta Mathematica Hungarica* VI (3-4), 285-335.
- Vidal Vázquez, E., J. Paz Ferreiro, J.G.V. Miranda, y A. Paz González, 2008. Multifractal analysis of pore size distributions as affected by simulated rainfall. *Vadose Zone Journal* 7 (2), 500-511.